Chernoff et la méthode probabiliste

Trois niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : questions **1**, **5** et **6**.

— Piste rouge : parties **1** et **2**.

— Piste noire : tout le devoir.

On illustre dans ce devoir la manière dont certaines inégalités probabilistes prouvent l'existence de configurations mathématiques subtiles.

1 Inégalité de Chernoff

Le résultat de cette courte partie a été démontré en TD, mais il est si classique qu'il faut vraiment savoir le retrouver seul rapidement.

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \operatorname{ch} x \leqslant \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

b) Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que pour tous $a, t \geqslant 0$: $\quad P(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$ $\quad$ (*inégalité de Chernoff*).

c) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables de Rademacher indépendantes. On pose $S = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que pour tout $a \geqslant 0$: $\quad P\big(|S| \geqslant a\big) \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2n}}$. $\quad$ On redémontre ici dans un cas particulier l'*inégalité de Hoeffding* étudiée en TD.

2 Combien de points presque équidistants sur une sphère ?

Étant donné $d \in [0,2]$ et $\varepsilon > 0$, on s'intéresse dans cette partie à l'existence de familles $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs unitaires d'un espace euclidien pour lesquelles $\|u_i - u_j\| \approx d$ au sens précis où $\|u_i - u_j\|^2 \in \,]d^2 - \varepsilon, d^2 + \varepsilon[$ pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$ distincts. Jusqu'où p peut-il être grand ? C'est la question qu'on se pose.

2) a) Calculer le rang de la matrice $M_n(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ de taille n pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $\operatorname{rg}\big(M^\top M\big) = \operatorname{rg}(M)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

À présent, soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

3) Soient $u_1, \dots, u_p \in E$ unitaires et $d \in \,]0, 2]$. On suppose que $\|u_i - u_j\| = d$ pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$ distincts. Montrer que $p \leqslant n + 1$. On pourra s'intéresser à la matrice de $(u_1, \dots, u_p)$ dans $\mathscr{B}$.

4) Soit $u_1, \dots, u_p \in E$ unitaires. On suppose que $\|u_i - u_j\| > \sqrt{2}$ pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$ distincts et on note φ l'application linéaire $(x_1, \dots, x_p) \longmapsto x_1 u_1 + \dots + x_p u_p$ de $\mathbb{R}^p$ dans E.

a) Soit $X \in \mathbb{R}^p$. On pose $x = x_1 u_1 + \dots + x_p u_p$ et $x^+ = |x_1|\, u_1 + \dots + |x_p|\, u_p$. Étudier le signe de $\|x\|^2 - \|x^+\|^2$, puis montrer que si $X \in \operatorname{Ker} \varphi$, les x_k sont soit tous nuls, soit tous non nuls.

b) En déduire que deux vecteurs de $\operatorname{Ker} \varphi$ sont toujours colinéaires, puis que $p \leqslant n + 1$.

En résumé, si on cherche des unitaires équidistants dans un espace euclidien de dimension n, le résultat de la question **3)** montre qu'on ne peut pas espérer en trouver plus de $n + 1$. Même chose d'après le résultat de la question **4)** si on cherche des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ pour lesquels $\|u_i - u_j\|^2 \in \,]d^2 - \varepsilon, d^2 + \varepsilon[$ pour tous $i, j \in [\![1, p]\!]$ distincts avec $d^2 - \varepsilon > 2$.

On fixe à présent $d \in \,\big]0, \sqrt{2}\big]$ et $\varepsilon > 0$ et on pose $\theta = \operatorname{Arcsin} \sqrt{1 - \dfrac{d^2}{2}}$.

5) Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},\mu_1,\ldots,\mu_{n-1}$ des variables de Rademacher indépendantes. On pose :

$$U=\frac{\cos\theta}{\sqrt{n-1}}\big(\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_{n-1}e_{n-1}\big)+\sin\theta\,e_n \qquad \text{et} \qquad V=\frac{\cos\theta}{\sqrt{n-1}}\big(\mu_1e_1+\ldots+\mu_{n-1}e_{n-1}\big)+\sin\theta\,e_n.$$

Calculer $\|U\|$ et $\|V\|$ et montrer que $P\Big(\|U-V\|^2\notin\big]d^2-\varepsilon,d^2+\varepsilon\big[\Big)\leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\varepsilon^2}{2d^4}}$.

6) Soit $(\lambda_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant k\leqslant n-1}}$ une famille de variables de Rademacher indépendantes. On pose $U_i=\lambda_{i,1}e_1+\ldots+\lambda_{i,n-1}e_{n-1}+ae_n$ pour tout $i\in[\![1,p]\!]$.

a) Montrer que $P\Bigg(\displaystyle\bigcup_{1\leqslant i<j\leqslant p}\Big\{\|U_i-U_j\|^2\notin\big]d^2-\varepsilon,d^2+\varepsilon\big[\Big\}\Bigg)\leqslant p(p-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{(n-1)\varepsilon^2}{2d^4}}$.

b) En déduire l'existence de $p=\Big\lfloor \mathrm{e}^{\frac{(n-1)\varepsilon^2}{4d^4}}\Big\rfloor$ vecteurs unitaires $u_1,\ldots,u_p\in E$ pour lesquels $\|u_i-u_j\|^2\in\big]d^2-\varepsilon,d^2+\varepsilon\big[$ pour tous $i,j\in[\![1,p]\!]$ distincts.

Pour $d\in\big]0,\sqrt{2}\big]$, on peut ainsi trouver un nombre exponentiel en n de vecteurs unitaires deux à deux distants d'environ d dans un espace euclidien de dimension n. Plus d est proche de 0, plus on peut trouver de tels vecteurs en grand nombre, ce qui est assez naturel géométriquement.

3 Approximation uniforme d'un monôme par des polynômes de petit degré

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on rappelle que le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev* T_n est caractérisé par la relation $T_n(\cos t)=\cos(nt)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. On a cela dit aussi vu que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $T_{n+2}=2XT_{n+1}-T_n$.

7) Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et R une variable de Rademacher indépendantes. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\mathrm{E}\big(T_{N+R}(x)\big)=x\,\mathrm{E}\big(T_N(x)\big)$.

8) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On se donne des variables de Rademacher $V_1,\ldots,V_n$ indépendantes. On pose $S_0=0$ et $S_i=V_1+\ldots+V_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, puis $P_{n,d}(x)=\mathrm{E}\big(T_{S_n}(x)\,\mathbb{1}_{\{|S_n|<d\}}\big)$ pour tous $d\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$.

a) Que vaut $\mathrm{E}\big(T_{S_i}(x)\big)$ pour tous $i\in[\![0,n]\!]$ et $x\in\mathbb{R}$?

b) Montrer que $P_{n,d}$ est une fonction polynomiale de degré au plus $d-1$ pour tout $d\in\mathbb{N}$.

c) Montrer que pour tout $d\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}\big|P_{n,d}(x)-x^n\big|\leqslant 2\,\mathrm{e}^{-\frac{d^2}{2n}}$.

d) En déduire que : $\forall\varepsilon\in]0,2]$, $\exists K\geqslant 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists P\in\mathbb{R}[X]$, $\deg(P)\leqslant K\sqrt{n}$ et $\displaystyle\sup_{x\in[-1,1]}\big|P(x)-x^n\big|\leqslant\varepsilon$.
Que raconte ce résultat ?